

УДК 514.76

doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-2

Об инфинитезимальных преобразованиях расслоений Вейля как решениях дифференциального уравнения для производной Ли связности полного лифта

К. М. Буданов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

ko13bud@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Одной из важнейших задач в теории расслоений над алгебрами Вейля является изучение инфинитезимальных аффинных преобразований этих расслоений. Получены альтернативные выражения инфинитезимальных аффинных преобразований расслоений Вейля со связностью полного лифта над специальными алгебрами Вейля. *Материалы и методы.* Используются методы тензорного анализа, теории производной Ли. *Результаты.* Получены альтернативные выражения инфинитезимальных аффинных преобразований, а также условия, накладываемые на компоненты этих преобразований. *Выводы.* Доказано, что инфинитезимальные аффинные преобразования расслоений Вейля со связностью полного лифта над специальными алгебрами Вейля могут быть представлены в виде суммы лифтов горизонтального и горизонтально-векторного типа.

Ключевые слова: альтернативное представление, инфинитезимальное аффинное преобразование, расслоение Вейля, связность полного лифта

Для цитирования: Буданов К. М. Об инфинитезимальных преобразованиях расслоений Вейля как решениях дифференциального уравнения для производной Ли связности полного лифта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 17–23. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-2

On infinitesimal transformations of Weil bundles as solutions of differential equation for Lie derivative of complete lift connection

K.M. Budanov

Penza State University, Penza, Russia

ko13bud@rambler.ru

Abstract. *Background.* The study of infinitesimal affine transformation of bundles over Weil algebra is one of the important problems in the theory of these bundles. Alternative representations of infinitesimal affine transformations of Weil bundle with complete lift connection over special Weil algebra are obtained. *Materials and methods.* Methods of tensor analysis and Lie derivative are used. *Results.* Alternative expressions of infinitesimal affine transformations are obtained, as well as conditions imposed on the components of these transformations. *Conclusions.* It is proved that infinitesimal affine transformations of Weil bundles with the complete lift connection over special Weil algebras can be represented as a sum of lifts of horizontal and horizontal vector type.

Keywords: alternative representation, infinitesimal affine transformation, Weil bundle, complete lift connection

For citation: Budanov K.M. On infinitesimal transformations of Weil bundles as solutions of differential equation for Lie derivative of complete lift connection. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(1):17–23. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2024-1-2

Введение

В данной работе изучается строение инфинитезимальных аффинных преобразований (ИАП) расслоений Вейля над специальными алгебрами Вейля [1], высота и ширина которых равна 2. В каноническом разложении ИАП представлены полный и вертикальные лифты векторных полей, а также горизонтально-векторные лифты тензорных полей типа $(1, 1)$. Компоненты ИАП удовлетворяют равенствам, представленным в [2]. Используя взаимосвязь вертикальных и горизонтальных лифтов, получим разложение ИАП, включающее только лифты горизонтального и горизонтально-векторного типа, а также условия, которым удовлетворяют компоненты ИАП.

1. Основные определения и понятия

Специальные алгебры Вейля, высота и ширина которых равна 2, имеют размерность, равную 4. Поэтому базисные элементы e^0, e^1, e^2, e^3 можно выбрать так, чтобы были справедливы равенства:

$$e^0 = 1, \quad e^1 e^2 = e^1 e^3 = 0, \quad e^2 e^2 = q e^3, \quad q = \pm 1.$$

Обозначим описанные алгебры через $W_4(q)$.

Если задано гладкое многообразие M_n размерности n с линейной связностью без кручения ∇ и алгебра гладких функций класса C^∞ на этом многообразии, а также алгебра Вейля A , то можно построить расслоение Вейля M_n^A над алгеброй Вейля A , а также продолжения функций, векторных и тензорных полей в это расслоение [3].

Пусть (U, x^i) – локальная карта на многообразии M_n , Γ_{ij}^k – коэффициенты линейной связности ∇ в этой карте.

В области $\pi^{-1}(U) \subset M_n^{W_4(q)}$, где $\pi: M_n \rightarrow M_n^{W_4(q)}$ – каноническая проекция, естественные продолжения координатных функций имеют вид

$$(x^i)^{W_4(q)} = x_0^i + x_1^i e^1 + x_2^i e^2 + x_3^i e^3.$$

Координатными функциями в области $\pi^{-1}(U) \subset M_n^{W_4(q)}$ являются функции $x_0^i, x_1^i, x_2^i, x_3^i$.

Векторные поля $\partial_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$, где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, образуют естественный репер в области $\pi^{-1}(U) \subset M_n^{W_4(q)}$.

Локальные выражения естественных продолжений векторного поля X в расслоения над алгебрами $W_4(q)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
X^{(0)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (X^i)_{(1)} \partial_i^1 + (X^i)_{(2)} \partial_i^2 + (X^i)_{(3)} \partial_i^3, \\
X^{(1)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^1 + (X^i)_{(1)} \partial_i^3, \\
X^{(2)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^2 + q(X^i)_{(2)} \partial_i^3, \\
X^{(3)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^3.
\end{aligned}$$

Локальные выражения горизонтальных продолжений векторного поля X в расслоения над алгебрами $W_4(q)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
X^{H_0} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (X^i)_{(1)} \partial_i^1 + (X^i)_{(2)} \partial_i^2 + (X^i)_{(3)} \partial_i^3, \\
X^{H_1} &= (X^i)_{(0)} \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{il}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^3 \right], \\
X^{H_2} &= (X^i)_{(0)} \left[\partial_i^1 - q(\Gamma_{il}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^3 \right], \\
X^{H_3} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^3.
\end{aligned}$$

Локальные выражения продолжений тензорного поля U типа (1, 1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
U^{H_0\gamma_1} &= (U_l^i)_{(0)} x_1^l \left[\partial_i^0 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left((\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_3^s + \frac{1}{2} (\partial_s \Gamma_{ri}^k - \Gamma_{ra}^k \Gamma_{si}^a)_{(0)} (x_1^s x_1^r + q x_2^s x_2^r) \right) \partial_k^3 \right], \\
U^{H_0\gamma_2} &= (U_l^i)_{(0)} x_2^l \left[\partial_i^0 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left((\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_3^s + \frac{1}{2} (\partial_s \Gamma_{ri}^k - \Gamma_{ra}^k \Gamma_{si}^a)_{(0)} (x_1^s x_1^r + q x_2^s x_2^r) \right) \partial_k^3 \right], \\
U^{H_0\gamma_3} &= (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \left[\partial_i^0 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^1 - \right. \\
&\quad \left. - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^2 - \left((\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_3^s + \frac{1}{2} (\partial_s \Gamma_{ri}^k - \Gamma_{ra}^k \Gamma_{si}^a)_{(0)} (x_1^s x_1^r + q x_2^s x_2^r) \right) \partial_k^3 \right], \\
U^{H_1\gamma_1} &= (U_l^i)_{(0)} x_1^l \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^3 \right], \\
U^{H_1\gamma_2} &= (U_l^i)_{(0)} x_2^l \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^3 \right], \\
U^{H_1\gamma_3} &= (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \left[\partial_i^1 - (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_1^s \partial_k^3 \right], \\
U^{H_2\gamma_1} &= (U_l^i)_{(0)} x_1^l \left[\partial_i^2 - q(\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^3 \right], \\
U^{H_2\gamma_2} &= (U_l^i)_{(0)} x_2^l \left[\partial_i^2 - q(\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^3 \right],
\end{aligned}$$

$$U^{H_2\gamma_3} = (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \left[\partial_i^2 - q (\Gamma_{si}^k)_{(0)} x_2^s \partial_k^3 \right],$$

$$U^{H_3\gamma_1} = (U_l^i)_{(0)} x_1^l \partial_i^3,$$

$$U^{H_3\gamma_2} = (U_l^i)_{(0)} x_2^l \partial_i^3,$$

$$U^{H_3\gamma_3} = (U_l^i)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{uv}^l)_{(0)} (x_1^u x_1^v + q x_2^u x_2^v) \right) \partial_i^3.$$

2. Каноническое представление инфинитезимального аффинного преобразования

В работе [2] было показано, что линейная связность ∇ без кручения на многообразии индуцирует единственную линейную связность ∇^C – полный лифт связности ∇ в расслоения Вейля над алгебрами $W_4(q)$.

Инфинитезимальными аффинными преобразованиями расслоений Вейля над алгебрами $W_4(q)$ являются векторные поля $\tilde{X}$, удовлетворяющие равенству

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}} \nabla^C = 0. \quad (1)$$

Данное равенство можно записать как систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta \tilde{X}_\sigma^i + \tilde{X}_\tau^m (\partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i}) + (\partial_j^\alpha \tilde{X}_\tau^m) \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} + (\partial_k^\beta \tilde{X}_\tau^m) \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} - (\partial_m^\tau \tilde{X}_\sigma^i) \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} = 0,$$

где индексы α, β, σ являются элементами множества $\{0, 1, 2, 3\}$. По индексу τ выполняется суммирование по элементам того же множества

В работе [2] были получены канонические разложения произвольных инфинитезимальных аффинных преобразований в расслоениях Вейля со связностью полного лифта над алгебрами $W_4(q)$:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & D^{(0)} + H^{(1)} + N^{(2)} + T^{(3)} + A^{H_0\gamma_3} + B^{H_0\gamma_2} + C^{H_0\gamma_1} + E^{H_1\gamma_3} + \\ & + F^{H_1\gamma_2} + \tilde{G}^{H_1\gamma_1} + K^{H_2\gamma_3} + \tilde{L}^{H_2\gamma_2} + M^{H_2\gamma_1} + \tilde{P}^{H_3\gamma_3} + \tilde{Q}^{H_3\gamma_2} + \tilde{S}^{H_3\gamma_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где D, H, N, T – векторные поля; $A, B, C, E, F, \tilde{G}, K, \tilde{L}, M, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}$ – тензорные поля типа $(1, 1)$, заданные на многообразии M_n .

Компоненты ИАП из равенства (2) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\nabla_i U_j = 0, \text{ где } U = A, B, C, E, F, \tilde{G}, K, \tilde{L}, M, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}, \quad (3)$$

$$(\mathcal{L}_Z \nabla)_{jk}^i = 0, \text{ где } Z = D, H, N, T, \quad (4)$$

$$V_m^i R_{lkj}^m = V_l^m R_{mkj}^i = V_j^m R_{lkm}^i = 0, \text{ где } V = A, B, C, E, K, \quad (5)$$

$$Y_l^m R_{mjk}^i - V_m^i R_{ljk}^m = 0, \text{ где } Y = F, \tilde{G}, \tilde{L}, M, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}, \quad (6)$$

$$F_l^m R_{mjk}^i + q M_m^i R_{ljk}^m = 0, \quad (7)$$

$$2\tilde{G}_l^m R_{mjk}^i - \tilde{P}_m^i R_{ljk}^m = 0, \quad (8)$$

$$2\tilde{L}_l^m R_{mjk}^i - \tilde{P}_m^i R_{ljk}^m = 0. \quad (9)$$

3. Альтернативное представление инфинитезимального аффинного преобразования

Используя локальные выражения естественных и горизонтальных лифтов векторного поля X можно показать, что

$$X^{(0)} = X^{H_0} + (\nabla X)^{H_1\gamma_1} + (\nabla X)^{H_2\gamma_2} + (\nabla X)^{H_3\gamma_3} + \frac{1}{2}(\nabla^2 X)^{H_3(\gamma_1\gamma_1 + q\gamma_2\gamma_2)},$$

$$X^{(1)} = X^{H_1} + (\nabla X)^{H_3\gamma_1},$$

$$X^{(2)} = X^{H_2} + q(\nabla X)^{H_3\gamma_2},$$

$$X^{(3)} = X^{H_3}.$$

Тогда инфинитезимальное аффинное преобразование (2) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & D^{H_0} + H^{H_1} + N^{H_2} + T^{H_3} + C^{H_0\gamma_1} + B^{H_0\gamma_2} + A^{H_0\gamma_3} + (\tilde{G} + \nabla D)^{H_1\gamma_1} + \\ & + F^{H_1\gamma_2} + E^{H_1\gamma_3} + M^{H_2\gamma_1} + (\tilde{L} + \nabla D)^{H_2\gamma_2} + K^{H_2\gamma_3} + (\tilde{S} + \nabla H)^{H_3\gamma_3} + \\ & + (\tilde{Q} + q\nabla N)^{H_3\gamma_3} + (\tilde{P} + \nabla D)^{H_3\gamma_3} + \frac{1}{2}(\nabla^2 D)^{H_3(\gamma_1\gamma_1 + q\gamma_2\gamma_2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие (1), определяющее инфинитезимальное аффинное преобразование $\tilde{X}$, можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}(\nabla_{\tilde{Y}}^C \tilde{Z}) - \nabla_{\tilde{Y}}^C(\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Z}) - \nabla_{\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y}}^C \tilde{Z} = 0.$$

На основании равенств

$$\nabla_{\partial_i^{H_3}}^C \partial_j^{H_\beta} = 0, \quad \beta = 0, 1, 2, 3,$$

$$\nabla_{\partial_i^{H_2}}^C \partial_j^{H_0} = \frac{q}{2}(R_{lij}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^{H_3},$$

$$\nabla_{\partial_i^{H_1}}^C \partial_j^{H_0} = \frac{1}{2}(R_{lij}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^{H_3},$$

$$\nabla_{\partial_i^{H_\alpha}}^C \partial_j^{H_\beta} = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad \beta = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_3} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_3}, \\
 \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_2} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_2} + q(R_{lij}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^{H_3}, \\
 \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_1} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_1} + (R_{lij}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^{H_3}, \\
 \nabla_{\partial_i^{H_0}}^C \partial_j^{H_0} &= (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} \partial_k^{H_3} + (R_{lij}^k)_{(0)} x_1^l \partial_k^{H_1} + (R_{lij}^k)_{(0)} x_2^l \partial_k^{H_2} + \\
 &+ \left[(R_{lij}^k)_{(0)} \left(x_3^l + \frac{1}{2} (\Gamma_{rs}^l)_{(0)} (x_1^r x_1^s + q x_2^r x_2^s) \right) + \frac{1}{2} (\nabla_s R_{lij}^k)_{(0)} (x_1^l x_1^s + q x_2^l x_2^s) \right] \partial_k^{H_3}
 \end{aligned}$$

можно показать, что условия, которым удовлетворяют компоненты векторных и тензорных полей, входящих в выражение (10), являются следствиями равенств (3)–(9).

Условия, накладываемые на компоненты векторных и тензорных полей в выражении (10), имеют вид

$$(\mathcal{L}_Z \nabla)_{jk}^i = 0, \text{ где } Z = D, H, N, T, \quad (11)$$

$$\nabla_j V_k^i = 0, \text{ где } V = A, B, C, E, F, K, M, \quad (12)$$

$$V_m^i R_{lkj}^m = V_l^m R_{mkj}^i = V_j^m R_{lkm}^i = 0, \text{ где } V = A, B, C, E, K, \quad (13)$$

$$F_l^m R_{mjk}^i + q M_m^i R_{ljk}^m = 0, \quad (14)$$

$$Y_l^m R_{mjk}^i - V_m^i R_{ljk}^m = 0, \text{ где } Y = F, M, \quad (15)$$

$$\nabla_j V_i^k + D^a R_{ajk}^i = 0, \text{ где } V = \tilde{G} + \nabla D, \tilde{L} + \nabla D, \tilde{P} + \nabla D, \quad (16)$$

$$\nabla_j (\tilde{S} + \nabla H)_k^i + H^a R_{ajk}^i = 0, \quad (17)$$

$$2((V + \nabla D)_l^m + \nabla_l D^m) R_{mjk}^i - ((\tilde{P} + \nabla D)_m^i + \nabla_m D^i) R_{ljk}^m = 0, \quad (18)$$

где $V = \tilde{G} + \nabla D, \tilde{L} + \nabla D$,

$$((V + \nabla D)_l^m + \nabla_l D^m) R_{mjk}^i - ((V + \nabla D)_m^i + \nabla_m D^i) R_{ljk}^m = 0, \quad (19)$$

где $V = \tilde{G} + \nabla D, \tilde{L} + \nabla D, \tilde{P} + \nabla D$,

$$((\tilde{S} + \nabla H)_l^m + \nabla_l H^m) R_{mjk}^i - ((\tilde{S} + \nabla H)_m^i + \nabla_m H^i) R_{ljk}^m = 0, \quad (20)$$

$$((\tilde{Q} + q \nabla N)_l^m + \nabla_l N^m) R_{mjk}^i - ((\tilde{Q} + q \nabla N)_m^i + \nabla_m N^i) R_{ljk}^m = 0. \quad (21)$$

Выполнив равносильные преобразования равенств (11)–(21), можно получить равенства (3)–(9).

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Инфинитезимальное аффинное преобразование расслоения Вейля над алгебрами $W_4(q)$, записанное в виде (2), можно представить в форме (10), при этом условия, накладываемые на компоненты выражения (10), определяются равенствами (11)–(21).

Список литературы

1. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1984. 264 с.
2. Султанов А. Я. Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Известия высших учебных заведений. Математика. 1999. № 9. С. 64–72.
3. Буданов К. М., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 12. С. 3–13.

References

1. Vishnevskiy V.V., Shirokov A.P., Shurygin V.V. *Prostranstva nad algebrami = Spaces over algebras*. Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1984:264. (In Russ.)
2. Sultanov A.Ya. Extensions of tensor fields and connections to Weil bundles. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 1999;(9):64–72. (In Russ.)
3. Budanov K.M., Sultanov A.Ya. Infinitesimal affine transformations of a second-order Weyl bundle with a full lift connection. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 2015;(12):3–13. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Константин Михайлович Буданов
старший преподаватель кафедры
информационно-вычислительных
систем, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

Konstantin M. Budanov
Senior lecturer of the sub-department
of information and computing systems,
Penza State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

E-mail: ko13bud@rambler.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 22.09.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 02.11.2023

Принята к публикации / Accepted 16.01.2024